#### Математическое программирование

(постановка задачи и основные определения)

*Основная* задача математического программирования состоит в минимизации вещественной функции на множестве, определенном системой ограничений типа равенства и/или неравенства.

Записывать задачу будем в следующем виде:

, где

**Определение.** *ϕ* называется *целевой функцией*.

*Ограничения или условия* записываются в виде:

, где

**Определение.** *X* называется *допустимым множеством*.

*Размерность задачи*: *n* – число переменных; *m+l* – число ограничений.

Запись min*ϕ*(*x*) означает:

1. либо найти оптимальную точку

.

**Определение.** Всякая допустимая *точка* *x*∈*X* называется *планом*; *x\** – *оптимальный план*.

1. если *x\** не существует, то найти , например, .
2. либо показать, что *X* = ∅ (допустимое множество – пусто).

**Классификация задач математического программирования**

1. Если целевая функция линейна, т.е. , где *c*∈*Rn* и ограничения линейны, т.е. имеют вид:

*Ax* ≤ *b*, где *A* – *m*×*n* – матрица, *b*∈*Rm*

*Gx*=*h*, где *G* – *l*×*n* – матрица, *h*∈*Rl*,

то это *задача линейного программирования* (иначе, нелинейного, например, квадратичного).

1. Если целевая функция *ϕ* – выпукла и допустимое множество *X* – выпуклое (*fi*, *gk* – выпуклые функции), то это *задача выпуклого программирования*.
2. Если по условию переменные – целые числа, т.е. , то это – *задача целочисленного программирования* (в данном курсе не рассматривается).

**Спецификация задач математического программирования**

* как правило, методы классического анализа для отыскания условных экстремумов неприменимы (экстремум достигается в угловых точках допустимого множества).
* большое количество переменных и ограничений в практических задачах, так что задача перебора точек, подозреваемых в экстремальности, может оказаться нетривиальной.

⇒ целью математического программирования является *создание*, где это возможно, *аналитических методов* определения решения, а при отсутствии таких методов – *создание эффективных вычислительных способов* получения *приближенного решения*.

Наименование предмета – *математическое программирование* – связано с тем, что целью решения задач является *выбор программы действий*.

**Cведения о выпуклых множествах**

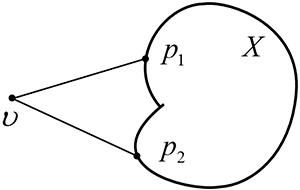
**Определение 1.**Множество  называется *выпуклым*, если   (выпуклое множество содержит отрезок, соединяющий две любые его точки).

**Определение 2.**Точка *x*∈*X* называется *внутренней*, если существует , где  – *ε*-окрестность точки *x*, т.е. точка *x*∈*X* называется *внутренней*, если существует такая её окрестность, все точки которой принадлежат *X*. И наоборот, если найдется такая *ε*-окрестность точки *υ*, которая не содержит ни одной точки множества *X* – такая точка называется *внешней* по отношению к множеству *X*.

**Определение 3.** Точка *x*∈*X* называется *граничной*, если ∀*ε* >0 существует и существует , т.е. в любой окрестности точки *x* содержатся как точки, принадлежащие множеству *X*, так и точки, не предлежащие этому множеству.

**Определение 4.** *Проекцией* точки *υ* на множество *X* называют такую точку *p*∈*X*, что

.

При этом,  называют "расстояние" от точки *υ* до множества *X*. Ясно, что если *υ*∈*X*, то *p*= *υ*. Если же *υ*∉*X*, и множество *X* – открыто, то проекция *p* не существует. Если множество *X* – не выпукло, то проекция может быть не единственной.

Верно следующее утверждение:

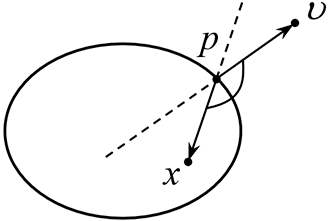
**Лемма 1.** Пусть X – выпуклое замкнутое множество из Rn, , тогда:

1) Любая точка *υ*∈*Rn* имеет и притом единственную проекцию на это множество;

2) Для того чтобы точка *p*∈*X* была проекцией точки *υ* на множество *X*, необходимо и достаточно выполнения неравенства  для ∀*x*∈*X*.

**Доказательство.**

тупой угол (*x*–*p*,*υ*–*p*) ≤ 0)



*Докажем первое утверждение леммы.*

Рассмотрим функцию *g*(*x*) вида

.

Поскольку *g*(*x*) сильно выпукла, то по следствию из теоремы об ограниченности множеств Лебега для сильно выпуклой функции можно утверждать, что *g*(*x*) достигает своей нижней грани на Х в единственной точке *p*′∈*X*.

Это означает, что

,

Причем равенство здесь возможно, только когда *x*=*p*′ (т.к. *p*′ единственная точка), а тогда *p*=*p*′, что и требовалось доказать.

*Докажем второе утверждение леммы.*

*Необходимость*. Пусть *p* – проекция точки *υ* на *X*.

Возьмем произвольную точку *x*∈*X,* отличную от *р,* рассмотрим точку . Ввиду выпуклости множества Х для ∀*α*∈[0,1] точка *z*∈*X.*

Так как , и из определения проекции следует, что , то .

Поскольку это неравенство справедливо для ∀*α*∈[0,1], то .

Переходя к пределу при *a->0,* имеем , что и требовалось доказать.

**Достаточность.** Пусть верно  ∀*x*∈*X*, тогда ∀*x*∈*X* верно

,

т.е. точка *p* является проекцией точки *υ* на *X*.

**Определение 5.** Гиперплоскостью в *Rn* называется множество вида ,

где  – вектор ∈ *Rn,* .

**Свойства гиперплоскостей**

1. Это множество всегда *не пусто*: если, например *ci*≠ 0, то точка *x*0 с координатами ,  удовлетворяет равенству , т.е. .

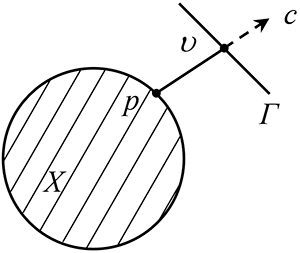
2. Пусть *x*0 – ∀(⋅) из *Гc,λ* , т.е. , тогда .

Известно, что два вектора *a*,*b*∈*Rn* – ортогональны, если (*a*,*b*)=0 ⇒ гиперплоскость *Гc,λ* состоит из тех и только тех точек *x*, для которых вектор *x*–*x*0 ортогонален вектору *с*. Вектор *с* называют *нормальным* вектором гиперплоскости *Гc,λ* .

3. В пространстве *Rn* гиперплоскость определяет два полупространства:

 и .

**Лемма 2** (Теорема отделимости).Для любого выпуклого и замкнутого множества *X* и любой точки *υ*, не принадлежащей множеству *X*, существует такая гиперплоскость *Г*, что  и  для ∀*x*∈*X*.

Очевиден геометрический смысл теоремы: существует проходящая через точку *υ* гиперплоскость *Г* такая, что *X* лежит в одном из полупространств, определенных *Г*.

*Доказательство.* Пусть *p* – проекция *υ* на *X*.

Определим , и рассмотрим

гиперплоскость ,

для которой выполняется первое утверждение леммы 2.

По лемме 1, если *p* – проекция, то ∀*x*∈*X* справедливо .

Поскольку точка *υ*∉*X*, то расстояние .

Итак, имеем для ∀*x*∈*X* : 

, *ч.т.д.*

**Теорема** (об опорной гиперплоскости).

В любой граничной точке *x*0 выпуклого множества существует *опорная гиперплоскость*, т.е. существует *c*≠0 и λ :

, и для всех *x*∈*X* .

|  |  |
| --- | --- |
| 33  Опорная гиперплоскость единственна (если существует касательная гиперплоскость, то она совпадает с опорной). И в этом случае опорная гиперплоскость единственная. | 34  Понятие опорной гиперплоскости – шире касательной. В точке *x*0 не существует касательной, но существуют опорные гиперплоскости, причем в качестве вектора *c* можно выбрать любой, лежащий между *c*1,*c*2. |

**Доказательство.**Рассмотрим последовательность {*υk*} – внешних точек относительно  (т.е. по определению сходимости ).

По лемме 2 (теорема отделимости) существует последовательность гиперплоскостей

, где  и .

Т.к. длину *ck* можно выбирать произвольно, то, не умаляя общности, можно считать, что . Не меняя обозначений, считаем, что .

Далее воспользуемся леммой Больцано-Вейерштрасса.

**Лемма**(Больцано-Вейерштрасса). Из любой ограниченной последовательности всегда можно извлечь такую частичную последовательность, которая сходилась бы к конечному пределу.

Рассмотрим .

Переходя к пределу в соотношении, определяющем *Гk*, получим гиперплоскость:

, где *λ*=(*с*, *x*0).

А, переходя к пределу в соотношении  ∀*x*∈*X*, получим:

 для ∀*x*∈*X* , *ч.т.д.* (равенство возникает, поскольку *x*0∈*X*, а (*c*, *x*0) = *λ*) .

**Теорема** (о разделяющей гиперплоскости).

Пусть *X*0 – множество внутренних точек выпуклого множества *X*; *Y* – выпуклое множество.

Если  (множество *Х*0 – не пусто) и  (не пересекается с другим множеством), то для множеств *X* и *Y* существует *разделяющая гиперплоскость*, т.е.

существует *c* ≠ 0 : ∀*x*∈*X*, ∀*y*∈*Y* справедливо соотношение (*c*,*y*) ≤ (*c*,*x*).

**Доказательство.**Рассмотрим множество .Это множество выпукло. Действительно,

.

Точка *z*=0 не является внутренней точкой множества *Z* (т.к. ).

Поэтому существует *с* ≠ 0: . Это неравенство справедливо:

- по теореме об опорной гиперплоскости, если точка *z*= 0 – граничная для множества *Z;*

- или по теореме о разделяющей гиперплоскости, если точка *z*= 0 – внешняя (тогда неравенство строгое).

⇒ .

Последнее неравенство остается справедливым и для ∀*y*∈*Y* и ∀*x*∈*X*, поскольку предельный переход не нарушает нестрогих неравенств, *ч.т.д.*

Введем два определения:

**Определение 1.** Точка *x* множества *X* (*x*∈*X*) называется *угловой* (*или крайней*) точкой, если в *X* не существует таких точек *x*′ и *x*″, *x*′ ≠ *x*″, что , при некотором *α*∈(0,1).

*Геометрически*: точка *x* – крайняя в *X*, если её нельзя поместить внутрь отрезка, концы которого лежат в *X*.

Например,

* у треугольника крайние точки – вершины;
* у луча – начало;
* у круга – все точки окружности;
* прямая, гиперплоскость – крайних точек не имеют.

**Определение 2.** Точка *x*0∈*X* называется *выпуклой комбинацией* точек *x*1,…, *xn*∈*X*, если существуют , существуют *xi*∈*X, i=1,…N,* такие, что:



**Теорема** Крейна–Мильмана (о представлении).

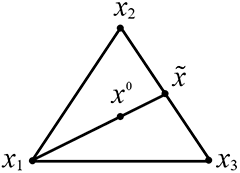
Пусть *X* – выпуклое, замкнутое, ограниченное множество, тогда ∀*x*0∈*X* может быть представлена в виде выпуклой комбинации конечного числа угловых точек множества, т.е. ∀*x*0∈*X* существуют *αi* ≥ 0, существуют *xi*∈*X* – угловые точки:



**Доказательство.** Индукция по размерности пространства *n*.

При *n*= 1 *X* – отрезок ⇒ утверждение теоремы очевидно.





Предположим, что для *n*= *k* – 1 теорема справедлива.

Пусть *X*∈*Rk*. Возможны два случая:

1) *x*0 – граничная точка *X*.

Построим в этой точке гиперплоскость, опорную к *X* (существует по теореме об опорной гиперплоскости):

, где *λ*= (*c*, *x*0) – опорная гиперплоскость.

Рассмотрим множество *X*0 = *X*∩ *Гc*,*λ..* Оно, как пересечение выпуклого, замкнутого, ограниченного множества *X* с выпуклым замкнутым множеством *Гc*,*λ*, само выпукло, замкнуто и ограничено.

Кроме этого, .

По индукционному предположению существуют  – угловые точки *X*0:



Покажем, что  являются угловыми точками и для множества *X*.

Предположим противное, т.е. что некоторая точка *xi* не является угловой для множества *X*. Это означает, что существует  и .

Т.к. , то



и т.к. *Гc,λ* – опорная к *X*, то

 (\*)

Поскольку 0 < *α*< 1, можно записать:

⇒.

Из последнего соотношения следует, что (*c*,*x*′) ≥ (*c*,*x*0), но

,

Поскольку .

Аналогично можно показать, что *x*″∈*X*0 ⇒ противоречие с тем, что *xi* – угловая точка *X*0  ⇒ *xi* – угловая точка *X*, *ч.т.д*

2) Пусть теперь *x*0 – внутренняя точка множества *X*. Проведем через *x*0 прямую *l*. Пересечение *l*∩ *X* является отрезком с концами *x͂* и *x͌*, принадлежащими границе множества *X*, и, поскольку *x*0 – внутренняя точка *X* ⇒ существует *α*∈(0,1):

.

Поскольку для граничных точек *x͂* и *x͌* теорема верна, то верна она и для *x*0. Действительно, для граничных точек имеют место соотношения:



,

где все *yi* и *zi* – угловые точки множества *X*.

А тогда , *ч.т.д.*

*Замечание*: Можно доказать, что в указанном представлении число угловых точек не превосходит величины *n*–размерности пространства.